Universidad Simón Bolívar
Curso de Probabilidades
Enero-Marzo 2010

Problemario II

1. Se hacen entrevistas a 1.200 personas tomadas de una población de 3.5 millones. El costo de cada entrevista es de Bs. F. 50. Cada persona entrevistada que manifieste interés en la linea de productos de nuestra compañia, representa una ganancia de 140 Bs. F. Suponiendo que, de la población considerada, 1 millón de personas se interesan por los productos de nuestra compañia, hallar la ganancia esperada para la compañía por el proceso de entrevistas si
(a) El muestreo de las personas es sin remplazo.
(b) El muestreo de las personas es con remplazo.

2. Un equipo explorador está a la búsqueda de ejemplares de una especie recién descubierta de tiburón en las costas de las Bermudas. Cada excursión de búsqueda tiene un costo de $ 2.000, con una probabilidad de 0.6 de encontrar un ejemplar de la especie en cuestión y una probabilidad de 0.25 de encontrar dos ejemplares de la especie (podemos ignorar la probabilidad de capturar tres o más ejemplares de esta especie). Si cada uno de estos tiburones puede ser vendido a los científicos en $ 3.500, ¿Cual es la ganancia que espera el equipo explorador por excursión de búsqueda de esta especie?

3. Un sistema de computación distribuida de alto desempeño consta de 2000 procesadores, cada uno de los cuales tiene probabilidad $p = 0.97$ de estar funcionando en un día cualquiera, independientemente de los demás. En los días en que funcionan 1900 procesadores o más, el sistema puede emprender tareas que dejan un ingreso de Bs. F. 1.8×10^6. Cuando funcionan entre 1500 y 1899 procesadores (inclusive), las tareas que pueden emprenderse dejan un ingreso de 800.000 Bs. F. Si funcionan menos de 1500 procesadores, no se realizan funciones lucrativas en el sistema, sino solo tareas de servicio social (apoyo a Universidades). Hallar el ingreso promedio diario de este sistema. Repita este problema utilizando la aproximación Poisson a la binomial.

4. Un reactor nuclear presenta dos pequeñas fisuras de las cuales escapan partículas radioactivas, a razón promedio de 5 por minuto para una fisura y 7 por minuto para la otra.
(a) Hallar la probabilidad de que, en un lapso de 3 minutos, escapen mas de 20 partículas por la primera fisura.
(b). Si en un minuto dado, se detecta el escape de mas de 25 partículas del

reactor, se declara condición de emergencia y el reactor debe ser desactivado. Hallar la probabilidad de que esta condición se presente en un minuto dado.

5. Las siguientes propiedades de la probabilidad, conocidas como *continuidad de la probabilidad*, pueden demostrarse a partir de los axiomas vistos en clase:
(i) Dados eventos que satisfacen $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, siempre se tiene

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n),$$

(ii) y para eventos que cumplen $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, se tiene

$$P(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Sea F la función de distribución acumulativa de una variable aleatoria. Utilice las propiedades (i) y (ii) para probar (a) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, (b) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$. ($\star$)

6. El tiempo de vida de ciertos transistores tiene una distribución exponencial, con parámetro $\theta = 1.12 \times 10^{-8} seg^{-1}$. Si utilizamos 12 de estos transistores, ¿Cual es la probabilidad de que, luego de un año, al menos 10 de ellos sigan funcionando?

7. En el contexto del problema anterior, suponga ahora que el tiempo de vida, en meses, de los transistores tiene una distribución Gamma($\alpha = 5, \theta = 5$). Si utilizamos 12 de estos transistores, ¿Cual es la probabilidad de que, luego de un año, al menos 10 de ellos sigan funcionando? Recuerde que la densidad Gamma(α, θ) viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-x/\theta}, \text{ para } x > 0.$$

8. En un instante cualquiera, la relación Señal a Ruido, Z, en uno de los receptores de un sistema de comunicaciones, puede modelarse (aproximadamente) como una variable aleatoria con densidad doble exponencial:
$f_Z(z) = \frac{a}{2} \exp(-a\,|z - b|)$, $z \in (-\infty, \infty)$, siendo a y b parámetros sobre los cuales, el diseñador del sistema tiene cierto control. Si $b = 100$, hallar el mínimo valor del parámetro a para que la relación S/R caiga por debajo de 50 menos del 5% del tiempo.

9. Dos máquinas son utilizadas en el proceso de producción de ciertas piezas para motores. Llamemos D al diámetro de las piezas producidas. Cuando se utiliza la máquina I, D puede considerarse una variable aleatoria normal, con media $\mu_1 = 10.0$ cm y desviación standard $\sigma_1 = 0.08$ cm, mientras que, al usar la

máquina II, D es normal con parámetros $\mu_2 = 9.9$ cm y $\sigma_2 = 0.033$. Las piezas producidas deben ser completamente desechadas cuando su diámetro resulta inferior a 9.8 cm. ¿Cual de las dos máquinas es preferible en el sentido de producir un menor % de piezas que deban ser desechadas?

10. Si la variable aleatoria $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$ satisface $\Pr(X > 10) = 0.7$ y $\Pr(X > 0) = 0.99$. ¿Cuanto valen μ y σ?

11. Una particula se mueve, en la dirección del eje x, con velocidad V, que se distribuye $N(0,1)$. Hallar la densidad de probabilidad correspondiente a su energía cinética, $E_c = \frac{1}{2} m V^2$.

    El siguiente problema tiene que ver con los métodos de generación de variables aleatorias en computadoras.

12. Si la variable aleatoria X tiene función de distribución continua y estrictamente creciente F, demuestre que (a) $Y = F(X)$ es una variable Unif$(0,1)$, y (b) Si $Y \sim$ Unif (0,1), entonces $Z = F^{-1}(Y)$ tiene función de distribución acumulativa F.

13. Si $X \sim$ Unif$[0,1]$. Hallar la densidad de probabilidad de $Y = X^2$.

14. Sea $X \sim$ Gamma(α, θ). Encuentre $\mu = \mathbb{E}(X)$ y $\mu_2 = \mathbb{E}(X^2)$. Deduzca que $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \alpha\theta^2$.

15. Si $X \sim$ Gamma$(\alpha = 2, \theta = 2)$, use la desigualdad de Chebyshev para probar que, $\Pr(X \geq 12) \leq 0.125$. Compare esta cota con la probabilidad exacta obtenida de una tabla o de integrar por partes.

Soluciones

Se incluyen soluciones completas para algunos problemas y el resultado para los restantes.

1. Los parámetros poblacionales son $N = 3.5 \times 10^6$ y $M = 10^6$, mientras que el tamaño de la muestra es $n = 1200$. Sea $X = \#$ de personas entrevistadas que muestran interés en los productos de nuestra compañia. La ganancia obtenida por el proceso de entrevistas es $G = 140\,X - 1200 \times 50$. Así, la ganancia esperada será, por linealidad:
$$\mathbb{E}(G) = 140\mathbb{E}(X) - 60.000$$
Para la parte (a), $X \sim \text{HiperG}(N, M, n)$ y $\mathbb{E}(X) = nM/N = 342.86$. Por lo tanto $\mathbb{E}(G)$ resulta $140 * 342.86 - 60.000 = -12.000$. La compañía debe esperar pérdidas de estas entrevistas.
Para la parte (b), $X \sim \text{Binom}(n, p)$ con $p = M/N$. La esperanza de X resulta ser np lo que da el mismo resultado que para la parte (a).

2. $\mathbb{E}(G) = -2.000 * 0.15 + (3.500 - 2.000) * 0.6 + (7.000 - 2.000) * 0.25 = 1.850$

3. Sea $X = \#$ de procesadores funcionando en un día determinado. Del enunciado, $X \sim \text{Binom}(n = 2000, p = 0.97)$. Para cada $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 2000\}$, sea
$$p_B(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$
Poniendo
$$p_1 = \Pr(X \geq 1900) = \sum_{x=1900}^{2000} p_B(x) \text{ y } p_2 = \Pr(1500 \leq X \leq 1899) = \sum_{x=1500}^{1899} p_B(x),$$
resulta $p_1 = .9999994$ y $p_2 = 5.6 \times 10^{-7}$, con lo cual tenemos
Ganancia promedio $= p_1 * 1.8 * 10^6 + p_2 * 800.000 + (1 - p_1 - p_2) * 0 \approx 1.799.999$
Para usar la aproximación Poisson, necesitamos una variable Binomial con n grande y p pequeña, por lo que consideramos $Y = 2000 - X = \#$ de procesadores que **no** funcionan en un día determinado. Entonces, $Y \sim \text{Binom}(2000, 0.03) \approx \text{Poisson}(2000 \times 0.03) = \text{Poisson}(60)$. Para $x \geq 0$, sea $\lambda = 60$ y $p_P(x) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$.
En términos de Y, recalculamos p_1 y p_2 como
$$p_1' = \Pr(Y \leq 100) \approx \sum_{x=0}^{100} p_P(x) \text{ y } p_2' = \Pr(101 \leq X \leq 500) \approx \sum_{x=101}^{500} p_P(x),$$
que resultan ser $p_1' = 0.9999991$ y $p_2' = 8.7 \times 10^{-7}$ y el resultado para la ganancia diaria esperada es $p_1' * 1.8 * 10^6 + p_2' * 800.000 + (1 - p_1' - p_2') * 0 \approx 1.799.999$.

4.

$$\text{(a)}\ \Pr(X \geq 21) = 1 - \Pr(X \leq 20) = 1 - \sum_{x=0}^{20} \mathrm{e}^{-15} \frac{15^x}{x!} = 0.083$$

$$\text{(b)}\ \Pr(X \geq 26) = 1 - \Pr(X \leq 25) = 1 - \sum_{x=0}^{25} \mathrm{e}^{-12} \frac{12^x}{x!} = 3.08 \times 10^{-4}$$

5. Sea X la variable aleatoria con f.d.a. F. Sea $\{a_n\}$ cualquier sucesión creciente de números reales que tiende a $+\infty$. Definimos los eventos $A_n = \{X \in (-\infty, a_n]\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Primeramente observamos que, por definición de F, $\Pr(A_n) = F(a_n)$. Además, por las propiedades de $\{a_n\}$, tenemos que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \cdots$ y

$$\Omega = \{X \in \mathbb{R}\} = \cup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

(sea cual sea el valor de X, tiene que caer en algún A_i porque los a_i divergen a ∞). Luego, aplicando la propiedad (i) del enunciado, tenemos

$$1 = \Pr(\Omega) = \lim_{n \to \infty} \Pr(A_n) = \lim_{n \to \infty} F(a_n),$$

lo cual demuestra (a). (b) se resuelve similarmente, tomando sucesiones $\{a_n\}$ que tiendan a $-\infty$.

6. Pensemos primero en el tiempo de vida, T_i, de un solo transistor. Utilizando la suposición de distribución exponencial, y teniendo cuidado de emplear unidades consistentes, la probabilidad de vivir mas de un año, para un transistor, es

$$\Pr(T_i > 31.54 \times 10^6 \text{ seg}) = \int_{31.54 \times 10^6}^{\infty} \theta e^{-\theta t}\, dt = e^{-31.54 \times 10^6 \theta} = 0.7024$$

Definimos la variable aleatoria X como el número de transistores que viven más de un año. Suponiendo que el funcionamiento de cada transistor es independiente del funcionamiento de los demás, tenemos 12 experimentos, consistentes en ver si cada uno de los transistores vive mas de un año, y estos son ensayos de Bernoulli independientes, con probabilidad de éxito $p = 0.7024$, y, por lo tanto, X es una variable con distribución $\mathrm{Bin}(12, p)$. Luego, la probabilidad pedida es

$$\Pr(\text{ 10 o más transistores funcionando al año }) =$$

$$= \Pr(X \geq 10) = \sum_{j=10}^{12} \binom{12}{j} p^j (1-p)^{12-j} \simeq 0.259$$

7. En este caso, la densidad de probabilidad para el tiempo de vida X, en meses, de un transistor es

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x/\theta}, \ \ x > 0,$$

con $\alpha = 5$ y $\theta = 5$. La probabilidad para un transistor, de vivir al menos un año es (según la tabla)

$$p = \Pr(X > 12) = \int_{12}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0.904.$$

Haciendo, como en el problema anterior, $Y =$ número de transistores que viven más de un año, tenemos $Y \sim$ Binom$(12, p)$ y la probabilidad que buscamos es $\Pr(Y \geq 10) = 0.899$.

8. 0.0461

9. Recordando la interpretación de la probabilidad como frecuencia de ocurrencia, vemos que la máquina para la cual el % de piezas rechazadas es menor, a la larga, será la máquina para la cual la probabilidad de pieza rechazada resulte mas pequeña. Para ambas máquinas, tenemos

$$\Pr(\text{ pieza rechazada }) = \Pr(X < 9.8) =$$

$$\Pr\left(\frac{X - \mu_i}{\sigma_i} < \frac{9.8 - \mu_i}{\sigma_i}\right) = \Pr\left(Z < \frac{9.8 - \mu_i}{\sigma_i}\right),$$

donde Z es una variable normal standard (Normal(0,1)), y el índice i vale 1 ó 2. Remplazando los datos y usando la tabla de la f.d.a. Φ de la normal standard, obtenemos que las probabilidades de pieza rechazada para las máquinas I y II son, respectivamente, $\Phi(-2.5) = .0062$ y $\Phi(-3.03) = .0013$, por lo que la segunda máquina es preferible.

10. $\mu \simeq 12.86$, $\sigma \simeq 5.52$

11. Llamaremos φ y Φ, respectivamente, a la función densidad de probabilidad y a la f.d.a. de la variable normal standard. Para hallar la densidad f_E de la variable E, primero buscamos su f.d.a. F_E, y luego calculamos la derivada de esta. Nótese que E solo toma valores no negativos. Para $x \geq 0$,

$$F_E(x) = \Pr(E \leq x) = \Pr(V^2 \leq \frac{2x}{m}) =$$

$$\Pr\left(-\sqrt{\frac{2x}{m}} \leq V \leq \sqrt{\frac{2x}{m}}\right) = 2\Phi\left(\sqrt{\frac{2x}{m}}\right) - 1.$$

Al derivar la ecuación anterior para obtener f_E, aplicamos la regla de la cadena:

$$f_E(x) = \frac{d}{dx} F_E(x) = 2\varphi\left(\sqrt{\frac{2x}{m}}\right) \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x}{m}}} \frac{2}{m} = \frac{1}{\sqrt{m\pi x}} e^{-x/m},$$

para $x > 0$. Esta densidad tiende a infinito en el origen y sirve como ejemplo de una densidad no acotada.

12. Ayuda: Utilizar la definición de función de distribución acumulativa.

13. Recordemos que la densidad de X es $f_X(x) = 1$, para $x \in [0, 1]$, siendo 0 fuera del intervalo. La función $g(x) = x^2$ is biyectiva monótona creciente de $[0, 1]$ en $[0, 1]$, con inversa diferenciable (salvo en el cero) $h(y) = \sqrt{y}$. Por tanto podemos utilizar la fórmula de cambio de variable que nos dice:

$$f_Y(y) = f_X(h(y))|h'(y)| \text{ para } y \in [0, 1].$$

Para $y \in [0, 1]$, $h(y)$ también cae en $[0, 1]$ y por tanto $f_X(h(y)) = 1$. Así, resulta

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \text{ para } y \in [0, 1].$$

Este es un ejemplo de que una densidad puede tender a infinito en algún punto del rango de la variable.

14. Ayuda: Use la definición de la función Γ:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$$

y efectúe los cambios de variable que convenga hacer.

15. Por el problema anterior sabemos que para la Gamma(2,2) se tiene $\mu = \alpha\, \theta = 4$ y $\sigma^2 = \alpha\, \theta^2 = 8$. Entonces,

$$\Pr(X \geq 12) = \Pr(X - 4 \geq 8) \leq \Pr(|X - 4| \geq 8) \overset{Chebyshev}{\leq} \frac{8}{8^2} = \frac{1}{8}$$

En comparación con esta cota, la probabilidad exacta es

$$\frac{1}{4} \int_{12}^\infty x\, \mathrm{e}^{-x/2} \mathrm{d}x = 0.01735$$